**Незалежність подій**

Нехай ** −** ймовірнісний простір **.**

**Озн.** Події *А*  і *В* із *F* називають незалежними, якщо

.

**Властивості.**

1) Якщо , то незалежність подій *А* і *В*  еквівалентна рівності

**.**

2) Якщо  або  , то події *А*  і *В* незалежні.

3) Подія *А* не залежить сама від себе тоді і тільки тоді, коли **** або **** .

4) Якщо події *А*  і *В* незалежні, то незалежними також будуть наступні пари подій : , , 

**Зауваження.** Поняття незалежності подій є симетричним.

Несумісні події *А*  та *В* з ненульовими ймовірностями ****і не можуть бути незалежними. Для несумісних подій поява однієї із них автоматично спричиняє неможливість іншої події (адже у них немає спільних елементарних подій).

**Незалежність в сукупності**

**Озн.** Випадкові події  називаютьнезалежними в сукупності, якщо для будь-яких наборів індексів 

.

**Зауваження.** Попарна незалежність подій і незалежність в сукупності не еквівалентні поняття: із незалежності в сукупності випливає попарна незалежність подій, навпаки ж твердження не завжди має місце.

**Приклад С.Н. Бернштейна.** Нехай грані тетраедра пофарбовані: перша − в червоний колір, друга − в зелений , третя − в синій, а четверта в усі три кольори. Розглянемо експеримент − підкидання тетраедра. Позначимо:

подія  − поява червоного кольору на грані, на яку впаде тетраедр при підкиданні, відповідно  − поява зеленого кольору,  − поява синього кольору. Маємо:

,

тобто , − попарно незалежні.

Оскільки  , події − залежні в сукупності.

**Схема незалежних випробувань Я. Бернуллі**

Розглянемо деякий експеримент і подію *А* , яка з ймовірністю *р* (0*<p<*1) може відбуватись в цьому експерименті. Будемо повторювати експеримент незалежно *n* разів.

Яка ймовірність того, що подія *А* здійсниться в *k* експериментах (позначимо цю ймовірність через )?

Нехай, наприклад, *n=*5 , *k*=2. Можливі варіанти



Ймовірність кожного варіанту , а всього таких варіантів , тобто

.

У загальному випадку

.

Цей набір ймовірностей називають **біномним розподілом ймовірностей**.

В подальшому будемо позначати .

**Приклад.** Передається 5 повідомлень по каналу зв’язку. Кожне повідомлення з ймовірністю 0,3 незалежно від інших викривляється. Знайти ймовірність того, що буде викривлено два повідомлення; не менше ніж два повідомлення.

**Розв.** Маємо схему незалежних випробувань Я. Бернуллі: *n=*5, *р*=0,3.

Нехай

*А* = { буде викривлено два повідомлення },

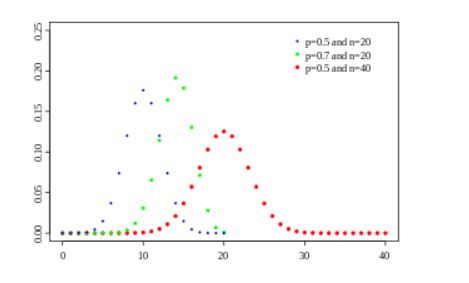
*В*= { буде викривлено не менше ніж два повідомлення },

тоді



**Найбільш ймовірне число появ події *А* в *n* випробуваннях Бернуллі**

Позначимо це число  .





− зростання, ,

− спадання, ,

.

Якщо  − ціле, то найбільш ймовірними будуть два значення:  та .

**Приклад.** Банк видав 48 кредитів незалежним позичальникам. Ймовірність того, що гроші будуть повернені точно в строк для кожного позичальника дорівнює 0,9. Яке найбільш ймовірне число прострочених кредитів?

**Розв.** Маємо схему незалежних випробувань Я. Бернуллі . Подія *А* − позичальник не поверне гроші в строк, , *n=*48.



тобто =4.

**Поліномний розподіл ймовірностей**

Нехай при проведенні одного випробування всі можливі результати утворюють повну групу подій :

.

Позначимо через  ймовірність появи разів події ,  разів події , …, разів події  у серії із *n* незалежних повторень даного досліду, тоді

.

Числа  для всіх можливих невід’ємних значень , таких , що , утворюють **поліномний розподіл ймовірностей**.

**Приклад.** Людина, що належить до певної групи населення, з ймовірністю 0,2 виявляється брюнетом, з ймовірністю 0,3 − шатеном, ймовірністю 0,4 − блондином і з ймовірністю 0,1 − рудою. Знайти ймовірність того, що в складі навмання вибраної групи з 8-и осіб число брюнетів, шатенів, блондинів та рудих рівне.

**Розв.**

0,0145.

**Граничні теореми в схемі Бернуллі**

**Теорема Пуассона (закон подій, які рідко з’являються) .** Якщо ймовірність *р* появи події *А* в кожному випробуванні наближається до нуля

() при необмеженому збільшенні числа випробувань *n*  причому добуток  наближається до постійного числа   то ймовірність  того, що подія *А* в *n* незалежнихвипробуваннях з’явиться рівно  разів, задовольняє наступній граничній рівності:

 .

**Зауваження.** Набір ймовірностей



називають **розподілом Пуассона**.

**Приклад.** Ймовірність допустити помилку при наборі тексту, що складається з 800 знаків, дорівнює 0, 005. Знайти найбільш ймовірне число зроблених помилок та його ймовірність.

**Розв.** Очевидно, можна застосувати схему Бернуллі. Найбільш ймовірне число помилок задовольняє нерівність



тобто =4. Для обчислення ймовірності використаємо т. Пуассона з , одержимо



Точна формула дає , так що помилка при використанні т. Пуассона незначна і дорівнює 0,0005.